

2019—2020 学年度上期八市重点高中联盟

“领军考试” 高三数学参考答案 (理数)

1. 【答案】B

【命题意图】考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.

【解析】 $\because M = \{y | y = 3^x\} = \{y | y > 0\}$, $N = \{x | 0 < x \leq 2\}$, $\therefore M \cap N = \{x | 0 < x \leq 2\}$. 故选 B.

2. 【答案】B

【命题意图】考查复数的几何意义, 考查数学运算的核心素养

【解析】因为 $z(-2+i)=5$, $z = \frac{5}{-2+i} = \frac{5(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = -2-i$, $\bar{z} = -2+i$, 复平面 $\bar{z}$ 对应的点为 $(-2, 1)$, 故选 B.

3. 【答案】B

【命题意图】考查充分必要条件, 考查逻辑推理的核心素养

【解析】 $f(x) = (2a-1)^x$ 是增函数, 需满足 $2a-1 > 1$, $\therefore a > 1$, “函数 $f(x) = (2a-1)^x$ 是增函数” 是 “ $a > 2$ ” 的必要不充分条件, 故选 B.

4. 【答案】D

【命题意图】考查平面向量的数量积, 考查数学运算的核心素养

【解析】如图, $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} \leq |\overrightarrow{AO}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \leq 1 \times 2 = 2$, 当 AC 为圆 O 直径时取等号, 故选 D.

5. 【答案】A

【命题意图】考查等差数列的性质, 考查数学运算的核心素养

【解析】 a_2, a_{4038} 是函数 $f(x) = x^2 - 8x + 3$ 的两个零点, $a_2 + a_{4038} = 8$. 又 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 故 $a_2 + a_{4038} = 2a_{2020} = 8$, 所以 $a_{2020} = 4$. 故选 A.

6. 【答案】C

【命题意图】考查程序框图, 考查逻辑推理的数学素养

【解析】因为当 k 为奇数时, $\cos k\pi = -1$; 当 k 为偶数时, $\cos k\pi = 1$, 所以输出 a 的值为 $-1+2-3+4-\cdots+60=30$. 故选 C.

7. 【答案】A

【命题意图】考查直线与圆相交, 几何概型, 考查数学运算, 逻辑推理的核心素养.

【解析】所给圆的圆心为坐标原点, 半径为 $\sqrt{2}$, 当弦长大于 2 时, 圆心到直线 l 的距离小于 1, 即 $\frac{|m|}{5} < 1$,

所以 $-5 < m < 5$ ，故所求概率 $P = \frac{5 - (-5)}{9 - (-6)} = \frac{2}{3}$ 。故选 A.

8. 【答案】A

【命题意图】考查数学文化，几何体的外接球，考查数学直观，逻辑推理的数学素养

【解析】设球心为 O ， $AC = BC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，则底面 ABC 外接圆的圆心为 AB 的中点 O_1 ， $R^2 = OO_1^2 + O_1B^2 = 1 + 1 = 2$ ， $S_{\text{球}} = 4\pi R^2 = 8\pi$ ，故选 A.

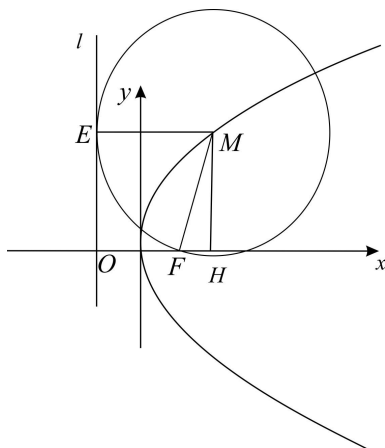
9. 【答案】C

【命题意图】考查抛物线的性质，直线与圆相切，考查逻辑推理，数学运算的核心素养

【解析】如图所示，连接 ME ，依题意 $ME \perp l$ ，过点 M 作 $MH \perp x$ 轴，垂足为 H ，在 $\text{Rt}\triangle MFH$ 中，

$|MF| = 2|FH|$ ，由抛物线定义可得 $|ME| = |MF|$ ，则 $2(2 - \frac{p}{2}) = 2 + \frac{p}{2}$ ，解得 $p = \frac{4}{3}$ ，故 $\odot M$ 的半径为

$2 + \frac{p}{2} = \frac{8}{3}$ 。故选 C.



10. 【答案】C

【命题意图】考查函数的图象，考查数学直观，逻辑推理的数学素养

【解析】由已知可得 $g(x) = f(x+1) = \frac{\ln|x|}{x} + x$ ，显然 $g(-x) = -g(x)$ ，故 $g(x)$ 为奇函数，其图象关于原点对称，排除 A；当 x 趋向于正无穷大时， $g(x)$ 趋向于正无穷大，排除 D； $g(1) = 1 > 0$ ，排除 B，故选 C.

11. 【答案】C

【命题意图】考查解不等式，利用导数研究函数的单调性，考查数学建模，逻辑推理数学运算核心素养.

【解析】设 $g(x) = \ln x \cdot f(x)$ ， $g'(x) = \frac{1}{x} \cdot f(x) + \ln x \cdot f'(x) < 0$ ，可知函数 $g(x)$ 在 $x > 0$ 时单调递减，又

$g(1) = 0$ ，可知函数 $g(x) = \ln x \cdot f(x)$ 在 $(0, 1)$ 大于零，且 $\ln x < 0$ ，可知 $f(x) < 0$ ，同理在 $(1, +\infty)$ 上，

$f(x) < 0$ ，当 $x = 0$ 时， $f'(1) \ln 1 < -\frac{1}{1} f(1)$ ， $f(1) < 0$ ，可知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 均有 $f(x) < 0$ ，由

$(x-2019)f(x) > 0$ 得 $\begin{cases} x-2019 < 0, \\ x > 0, \end{cases} \therefore$ 可知不等式的解集为 $(0, 2019)$. 故选 C.

12. 【答案】D

【命题意图】本题考查空间几何体的结构特征，考查逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】设 $\triangle ABC$ 所在截面圆的圆心为 O_1 ， AB 中点为 D ，连接 OD, O_1D ， $OA=OB$ ，所以 $OD \perp AB$ ，同理 $O_1D \perp AB$ ，所以 $\angle ODO_1$ 即为 OD 与平面 ABC 所成的角，故 $\angle ODO_1 = 60^\circ$ ；因为 $OA=OB=4, AB=4\sqrt{2}$ ，所以 $\triangle OAB$ 是等腰直角三角形， $\therefore OD=2\sqrt{2}$ ，在 $\text{Rt}\triangle ODO_1$ 中，由 $\cos 60^\circ = \frac{O_1D}{OD}$ ，得 $O_1D = \sqrt{2}$ ，由勾股定理得： $OO_1 = \sqrt{6}$ ，因为 O_1 到 A, B, C 三点的距离相等，所以三棱锥 $O-ABC$

外接球的球心 E 在射线 OO_1 上，设四面体 $OABC$ 外接球半径为 R ，在 $\text{Rt}\triangle O_1BE$ 中， $O_1B = \sqrt{OB^2 - OD^2} = \sqrt{10}$ ， $BE = R, O_1E = |R - \sqrt{6}|$ ，由勾股定理可得： $O_1B^2 + O_1E^2 = BE^2$ ，即

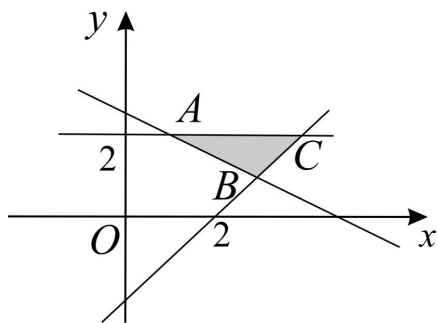
$10 + (R - \sqrt{6})^2 = R^2$ ，解得 $R = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ ，故所求球体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \frac{512\sqrt{6}}{27}\pi$ ，故选 D.

13. 【答案】24

【命题意图】考查简单的线性规划，考查数学建模，数据分析的核心素养.

【解析】作出不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示，其中 $A(1,2)$ ， $B(3,1)$ ， $C(4,2)$ ，

$x^2 + y^2 + 2y = x^2 + (y+1)^2 - 1$ ， $x^2 + (y+1)^2$ 表示可行域内的任意一点与 $(0, -1)$ 之间距离的平方，所以 $z_{\max} = 4^2 + [2 - (-1)]^2 - 1 = 24$.



14. 【答案】1或 $-\frac{4}{5}$

【命题意图】考查二项式定理，考查数据分析，数学运算的核心素养.

【解析】根据题意， $(x+a)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} a^r$ ，其中当 $r=1$ 时，有 $T_2 = C_6^1 x^5 a$ ，当 $r=2$ 时，有 $T_3 = C_6^2 x^4 a^2$ ，则 $(2x-1)(x+a)^6$ 的展开式中 x^5 的系数为 $-C_6^1 a + 2C_6^2 a^2 = -6a + 30a^2$ ，则有 $-6a + 30a^2 = 24$ ，可得 $5a^2 - a - 4 = 0$ ， $\therefore (a-1)(5a+4) = 0$ ， $\therefore a = 1$ 或 $a = -\frac{4}{5}$.

15. 【答案】 $(0, 1)$

【命题思路】用递推公式呈现数列设计综合性试题，考查等比数列的定义、通项公式、递增数列的概念、解不等式，以及转化与化归思想、分类讨论思想、运算求解能力。

【解析】由 $4a_n - a_{n+1} = 3a_n \cdot a_{n+1}$ 得， $\frac{4}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 3$ ，则 $4(\frac{1}{a_{n+1}} - 1) = \frac{1}{a_n} - 1$ ，当 $a_1 = 1$ 时，可得 $a_2 = a_3 = \dots = 1$ ，

不满足题意，所以 $a_1 \neq 1$ ，所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 是以 $\frac{1}{a_1} - 1$ 为首项， $\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列，所以

$\frac{1}{a_n} - 1 = (\frac{1}{a_1} - 1) \cdot (\frac{1}{4})^{n-1}$ ，则 $a_n = \frac{1}{(\frac{1}{a_1} - 1) \cdot (\frac{1}{4})^{n-1} + 1}$ ，又因为数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的递增数列，所以

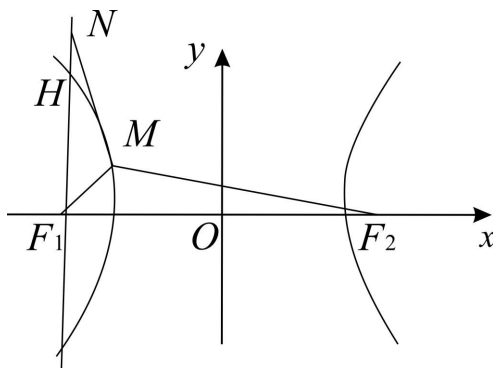
$$a_{n+1} > a_n > 0, \text{ 即 } \frac{1}{(\frac{1}{a_1} - 1) \cdot (\frac{1}{4})^n + 1} > \frac{1}{(\frac{1}{a_1} - 1) \cdot (\frac{1}{4})^{n-1} + 1} > 0, \text{ 化简得 } \begin{cases} \frac{1}{a_1} - 1 > 0, \\ (\frac{1}{a_1} - 1) \cdot \frac{1}{4} < \frac{1}{a_1} - 1, \end{cases} \text{ 解得 } 0 < a_1 < 1. \text{ 故}$$

首项 a_1 取值范围为 $(0, 1)$ 。

16. 【答案】 $(1, \frac{\sqrt{13}}{3}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$

【命题意图】考查双曲线的性质，考查逻辑推理，数学运算核心素养

【解析】如图所示



$|MF_2| - |MF_1| = 2a$ ， $|MF_2| + |MN| > 4b$ ，即 $|MF_1| + |MN| + 2a > 4b$ ，点 M 均满足 $|MF_2| + |MN| > 4b$ ，当

点 M 位于 H 点时， $|MF_1| + |MN|$ 最小，故 $\frac{3b^2}{2a} + 2a > 4b$ $3b^2 + 4a^2 > 8ab$ ， $\therefore 3b^2 - 8ab + 4a^2 > 0$ ，

$\therefore (2a - b)(2a - 3b) > 0$ ， $2a > 3b$ 或 $2a < b$ ， $\therefore 4a^2 > 9b^2$ 或 $4a^2 < b^2$ ， $\therefore 9c^2 < 13a^2$ ， $1 < \frac{c}{a} < \frac{\sqrt{13}}{3}$ ，

即 $1 < e < \frac{\sqrt{13}}{3}$ 或 $4a^2 < c^2 - a^2$ ， $\therefore c^2 > 5a^2$ ， $\frac{c}{a} > \sqrt{5}$ ，即 $e > \sqrt{5}$ 。双曲线 C 的离心率的取值范围为

$(1, \frac{\sqrt{13}}{3}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$ 。

17. 【命题意图】考查解三角形，考查数学运算，逻辑推理的核心素养

【解析】(1) 因 $AB + AC = 10$ ， $AC = 3$ ， $\therefore AB = 7$ ，

$$\cos \angle ACB = -\frac{1}{9}, \therefore \sin \angle ACB = \frac{4\sqrt{5}}{9}, \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{由正弦定理可得} \frac{\sin \angle ABC}{AC} = \frac{\sin \angle ACB}{AB}, \therefore \frac{\sin \angle ABC}{3} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{9}}{7}, \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{4\sqrt{5}}{21} \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$(2) \cos \angle BAC = \frac{1}{3}, \therefore \sin \angle BAC = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{设 } AB = t (0 < t < 10), AC = 10 - t, \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$\text{由余弦定理 } 6^2 = t^2 + (10 - t)^2 - 2t(10 - t)\cos \angle BAC, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\text{可得 } t^2 - 10t + 24 = 0, \therefore t_1 t_2 = 24, \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |t_1 t_2| \sin \angle BAC = 12 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 8\sqrt{2} \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

18. 【命题意图】考查正态分布，考查数学建模，数据分析，数学运算的数学素养.

$$\text{【解析】(1) } \mu = 0.1 \times 2 + 0.2 \times 6 + 0.4 \times 10 + 0.2 \times 14 + 0.1 \times 18 = 10, \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$\sigma^2 = s^2 = 2 \times (8^2 \times 0.1 + 4^2 \times 0.2) + (10 - 10)^2 \times 0.4 = 19.2 \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$(2) \mu + \sigma = 10 + 4.38 = 14.38, \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

设3名乘客候车时间超过15分钟的事件为A,

$$P(x > 14.38) = \frac{1 - p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)}{2} = 0.1587, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$P(A) = C_{10}^3 (0.1587)^3 (0.8413)^7 \approx 0.139 > 0.003, \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

准点率正常. \dots\dots\dots 12分

19. 【命题意图】考查面面平行的判定，二面角，考查直观想象，逻辑推理的数学素养.

【解析】(1) 连接BD, $\because AB = AD, \angle BAD = 60^\circ, \therefore \triangle ABD$ 为等边三角形,

$\because M$ 为AD的中点, $\therefore BM \perp AD$,

$\because AD \perp CD, CD, BM \subset \text{平面} ABCD, \therefore BM \parallel CD, \dots\dots\dots 1 \text{分}$

又 $BM \not\subset \text{平面} PCD, CD \subset \text{平面} PCD, \therefore BM \parallel \text{平面} PCD$

$\therefore M, N$ 分别为AD, PA的中点, $\therefore MN \parallel PD \dots\dots\dots, 2 \text{分}$

又 $MN \not\subset$ 平面 PCD , $PD \subset$ 平面 PCD ,

$\therefore MN \parallel$ 平面 PCD3 分

又 $BM, MN \subset$ 平面 BMN , $BM \cap MN = M$,

$\therefore$ 平面 $BMN \parallel$ 平面 PCD4 分

(2) 连接 PM , $\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ABCD \cap$ 平面 $PAD = AD$,

$PM \subset$ 平面 PAD ,

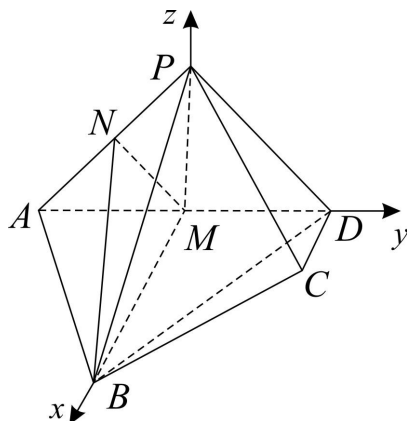
$PM \perp AD$, $\therefore PM \perp$ 平面 $ABCD$.

又 $BM \perp AD$, $\therefore MB, MD, MP$ 两两互相垂直.6 分

以 M 为坐标原点, $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MP}$ 分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向,

建立如图所示的空间直角坐标系 $M - xyz$.

$\because AD = 6, CD = \sqrt{3}$,



则 $M(0,0,0), P(0,0,3), A(0,-3,0), N(0,-\frac{3}{2},\frac{3}{2}), B(3\sqrt{3},0,0), C(\sqrt{3},3,0)$,

设平面 BMN 的一个法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 平面 BCP 的一个法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$\because \overrightarrow{MB} = (3\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{MN} = (0, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$,

$\therefore$ 由 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 3\sqrt{3}x_1 = 0 \\ -\frac{3}{2}y_1 + \frac{3}{2}z_1 = 0 \end{cases}$, $\therefore$ 取 $\vec{m} = (0, 1, 1)$,8 分

$\because \overrightarrow{BC} = (-2\sqrt{3}, 3, 0), \overrightarrow{BP} = (-3\sqrt{3}, 0, 3)$,

$$\therefore \text{由} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} -2\sqrt{3}x_2 + 3y_2 = 0 \\ -3\sqrt{3}x_2 + 3z_2 = 0 \end{cases}, \therefore \text{取} \vec{n} = (\sqrt{3}, 2, 3), \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{2+3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{16}} = \frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{8}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{平面 } BMN \text{ 与平面 } BCP \text{ 所成锐二面角的余弦值为 } \frac{5\sqrt{2}}{8}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 【命题意图】考查椭圆的方程，直线与椭圆的位置关系，定值问题.考查逻辑推理，数学运算，数据分析的数学素养

$$\text{【解析】(1) 依题意有 } b = \frac{3}{\sqrt{2+1}} = \sqrt{3}, \therefore b^2 = 3, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{由 } |PF_1| = 2 \text{ 及椭圆的定义得 } |PF_2| = 2a - 2, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{由余弦定理得 } |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cos \angle F_1PF_2 = |F_1F_2|^2, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{即 } a^2 - 3a + 3 = c^2, \text{ 又 } a^2 - c^2 = b^2 = 3, \therefore a = 2,$$

$$\text{故椭圆的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 联立可得 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}, (3+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = 3+4k^2 - m^2 > 0, \text{ ①}$$

$$\text{又 } x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3+4k^2}, x_1x_2 = \frac{4(m^2-3)}{3+4k^2}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$y_1 \cdot y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2x_1x_2 + mk(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{3(m^2-4k^2)}{3+4k^2},$$

$$\text{由 } k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{b^2}{a^2}, \text{ 可得 } \frac{y_1 \cdot y_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{3}{4}, \therefore y_1 \cdot y_2 = -\frac{3}{4}x_1x_2, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\frac{3(m^2-4k^2)}{3+4k^2} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{4(m^2-3)}{3+4k^2}, \therefore 2m^2 - 4k^2 = 3, \text{ 满足①},$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2]}$$

$$= \sqrt{(1+k^2)[(-\frac{8km}{3+4k^2})^2 - 4 \times \frac{4m^2-12}{3+4k^2}]}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{1+k^2}}{|m|} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

设原点到直线的距离为 d , $d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot |AB| = \frac{1}{2} \times \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} \times \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{1+k^2}}{|m|} = \sqrt{3} \text{ 为定值.} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 【命题意图】考查利用导数证明不等式，函数的零点，考查逻辑推理、数据分析、数学运算的核心素养.

【解析】(1) $f(x) = \frac{e^x}{x} - 2(x - \ln x)$;

$$\text{则 } f'(x) = \frac{(x-1)(e^x - 2x)}{x^2} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

令 $G(x) = e^x - 2x \ (x > 0)$,

$$G'(x) = e^x - 2 \ (x > 0),$$

易得 $G(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 递增, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$\therefore G(x) \geq G(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$, $\therefore e^x - 2x > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立.

$\because f(x)$ 在 $(0, 1)$ 递减, 在 $(1, +\infty)$ 递增. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$\therefore f(x) \geq f(1) = e - 2 > 0$. 故 $f(x) > 0$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(2) \ g(x) = a \cdot b = -x \sin x + e^x \cos x,$$

$$g'(x) = -\sin x - x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x = (e^x - x) \cos x - (e^x + 1) \sin x \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

①当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ 时, $\therefore e^x - x > 0$,

$$\therefore (e^x - x) \cos x \geq 0, (e^x + 1) \sin x \leq 0,$$

$$\therefore g'(x) = (e^x - x) \cos x - (e^x + 1) \sin x \geq 0.$$

$\therefore g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 单调递增, $g(0) = 1 > 0$, $g(-\frac{\pi}{2}) < 0$.

$\therefore g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上有一个零点, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

②当 $x \in (0, \frac{\pi}{4}]$ 时, $\cos x \geq \sin x$, $e^x > x$,

$\therefore e^x \cos x > x \sin x$, $\therefore g(x) > 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{4}]$ 恒成立,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4}]$ 无零点.10 分

③当 $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 时, $0 < \cos x < \sin x$,

$$g'(x) = e^x (\cos x - \sin x) - (x \cos x + \sin x) < 0.$$

$\therefore g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 单调递减,

$$g(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0, g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4}) > 0,$$

$\therefore g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 存在一个零点.

综上, $g(x)$ 的零点个数为 2.12 分

22. 【命题意图】考查极坐标与参数方程, 考查逻辑推理, 数据分析的核心素养.

【解析】(1) 直线 l 的普通方程为: $\sqrt{3}y - x - \sqrt{3} = 0$,2 分

$$\text{参数方程为 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = 1 + \frac{1}{2}t. \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 由 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta, \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 得 $\cos \theta = \frac{x}{2}$, $\sin \theta = y$, 两式平方相加得 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

$\therefore$ 椭圆 T 的普通方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$6 分

$$\text{将直线的参数方程 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = 1 + \frac{1}{2}t. \end{cases} \text{ 代入 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

$$\text{得 } \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2}{4} + \left(1 + \frac{1}{2}t\right)^2 = 1, \text{ 即 } 7t^2 + 16t = 0,$$

解得 $t_1 = 0, t_2 = -\frac{16}{7}$,9 分

所以 $PQ = |t_1 - t_2| = \frac{16}{7}$10 分

23. 【命题意图】考查绝对值不等式的解法，恒成立问题，考查逻辑推理，数学运算的核心素养.

【解析】（1）由 $f(x) = |x+1| + |x-a| \geq |x+1 - (x-a)| = |a+1|$,2 分

（当且仅当 x 介于 -1 与 a 之间时取等号），3 分

$\therefore |a+1| = 2a^2, \therefore a = 1$ 或 $a = -\frac{1}{2}$;5 分

（2）依题意，等价于 $f(x) > g(x)$ ，当 $x \geq -1$ 时恒成立，

即 $|x+1| + |x-a| > -x^2 - x + 2$, $|a-x| > -x^2 - 2x + 1$,6 分

所以 $a > -x^2 - x + 1$ 或 $a < x^2 + 3x - 1$ 当 $x \geq -1$ 时恒成立，

由 $a > (-x^2 - x + 1)_{\max}, \therefore a > [-(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}]_{\max}, \therefore a > \frac{5}{4}$8 分

由 $a < (x^2 + 3x - 1)_{\min}, \therefore a < [(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{13}{4}]_{\min} (x \geq -1), \therefore a < -3$,

综上 a 的取值范围是 $a < -3$ 或 $a > \frac{5}{4}$10 分